

СТРУКТУРА СЛОИСТОГО ШАРА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

© Клочков С.Н., 2012

Россия, Нижний Архыз, Карачаево-Черкесская Республика,

Рассматривается модель слоистого тяготеющего шара с центральной симметрией применительно к Земле и планетам того же типа, в которой сферически однородное ядро большой плотности окружено мантией – сферической оболочкой с постоянной плотностью, отличающейся от плотности ядра в меньшую сторону. В рамках модели проведено шесть иллюстративных расчётов: радиальной зависимости ускорения силы тяжести, величины плотностей ядра и мантии, скоростей при движении в гипотетическом туннеле, времени туннелирования, момента инерции Земли с адаптацией под реально существующий, радиальной зависимости давления внутри Земли. Такие же расчёты проведены и для неоднородной мантии. Результаты сравниваются с данными геофизических измерений и предсказаниями модели с постоянной плотностью.

ВВЕДЕНИЕ

Существующие теории, рассматривающие общую структуру тяготеющего слоистого шара с центральной симметрией, как правило, сосредотачиваются на рассмотрении химического состава и кристаллической структуры вещества его оболочек.

В представляемой работе автор пытается отойти от общепринятых методик и рассматривает наиболее общие вопросы исследования подобных структур.

РАЗДЕЛ I

В этом разделе рассмотрим основные свойства внутренней структуры идеального слоистого шара с центральной симметрией – радиальную зависимость ускорения силы тяжести, плотности и размер составляющих его частей – ядра и мантии, найдём скорости прохождения пробным телом диаметра шара и вычислим время этого прохождения.

Рассмотрим простейший случай внутренней структуры идеального, невращающегося слоистого шара с центральной симметрией, для которого известно следующее – он состоит из двух объёмов – ядра высокой плотности и окружающей его оболочки меньшей плотности – с большой точностью известен его радиус и масса, следовательно, с той же точностью известна и его средняя плотность. Обозначим через M коэффициент превышения плотности вещества ядра над средней плотностью вещества шара $\rho_{\text{ср.}}$, при этом плотность вещества, слагающего ядро, будет выглядеть как $M\rho_{\text{ср.}}$ ($M > 1$), а через d – коэффициент понижения плотности вещества, окружающего ядро (оболочку), при этом плотность вещества, слагающего оболочку, будет выглядеть как $d\rho_{\text{ср.}}$ ($d < 1$). В

первом приближении примем также, что плотности веществ обеих областей не меняются с глубиной. Безразмерную границу их раздела обозначим $n = R_{\text{ядр}}/R$.

В результате имеем три неизвестных – M , d , n . Для однозначного их определения необходимо и достаточно также определить три уравнения. Рассмотрим их:

I. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА МАСС

$$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{ср.}} = \frac{4}{3}\pi (nR)^3 M \rho_{\text{ср.}} + \frac{4}{3}\pi (1-n^3)R^3 d \rho_{\text{ср.}}, \quad (1)$$

где:

$\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{\text{ср.}}$ – вся масса шара;

$\frac{4}{3}\pi (nR)^3 M \rho_{\text{ср.}}$ – масса ядра;

$\frac{4}{3}\pi (1-n^3)R^3 d \rho_{\text{ср.}}$ – масса оболочки.

После сокращения получим:

$$1 = n^3 M + (1-n^3) d. \quad (2)$$

Отсюда:

$$d = \frac{1 - Mn^3}{1 - n^3}. \quad (3)$$

II. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА УСКОРЕНИЯ СИЛЫ ТЯЖЕСТИ

Обозначим: γ – гравитационная постоянная $6.6742 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3/\text{кг с}^2$;

t – текущая координата в пределах ядра ($0 \leq t \leq n$);

u – текущая координата в пределах оболочки ($n \leq u \leq 1$).

В пространстве ядра:

$$a(t) = \frac{4}{3}\gamma\pi R\rho M t \quad \text{– на графике } G_n(t). \quad (4)$$

В пространстве оболочки от вещества ядра:

$$a(u)_{\text{ядр.}} = \frac{4}{3}\gamma\pi R\rho M n^3 \frac{1}{u^2} \quad \text{– на графике } FN(u). \quad (5)$$

В оболочке:

$$a(u)''_{об.} = a(u)'_{об.} + a(u)_{ф. ядр.} - \text{на графике } C2(u), \tag{6}$$

где:

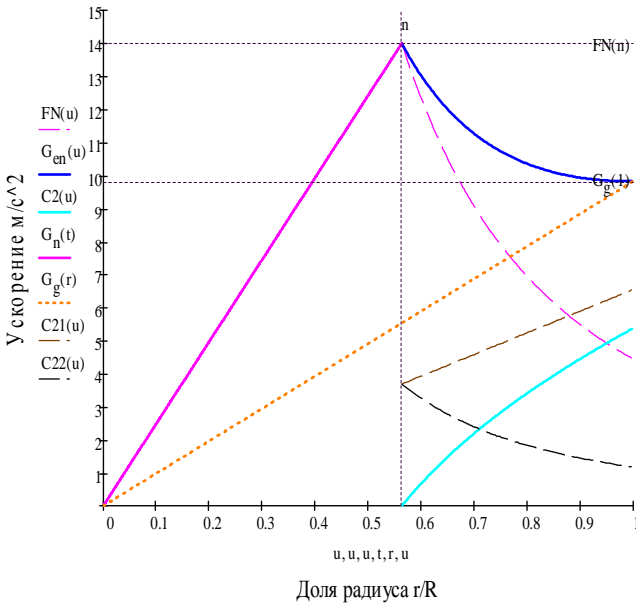
$$a(u)'_{об.} = \frac{4}{3} \gamma \pi R \rho d u - \text{ускорение в оболочке от вещества самой оболочки (на графике } C21(u)), \tag{7}$$

$$a(u)_{ф. ядр.} = -\frac{4}{3} \gamma \pi R \rho d \frac{n^3}{u^2} - \text{ускорение в оболочке от фиктивного ядра плотностью } \rho d \text{ (на графике } C22(u)), \tag{8}$$

$$a(u)''_{об.} = \frac{4}{3} \gamma \pi R \rho d u - \frac{4}{3} \gamma \pi R \rho d \frac{n^3}{u^2} = \frac{4}{3} \gamma \pi R \rho d \frac{1}{u^2} (u^3 - n^3) - \text{на графике } C2(u). \tag{9}$$

Итого в оболочке:

$$a(u)_{об.} = \frac{4}{3} \gamma \pi R \rho \left[Mn^3 \frac{1}{u^2} + d \frac{1}{u^2} (u^3 - n^3) \right] - \text{на графике } G_{en}(u). \tag{10}$$



Ускорение в шаре со сплошным ядром.

Рис. 1. Ускорения силы тяжести в шаре

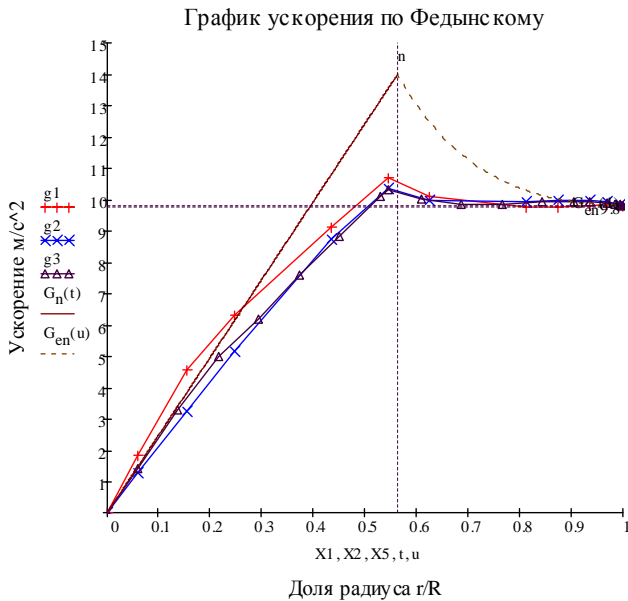


Рис. 2. Сравнение расчётов разных моделей

Линии, отмеченные значками, взяты из литературы: +, × – (Федынский, 1964), $G_n(t)$, $G_{en}(u)$ – расчётные величины.

Существенное замечание к произведённым выкладкам: производная ускорения по радиусу на поверхности шара ($u = 1$) не может быть отрицательной, т. к. это приводит к существованию феномена понижения плотности вещества мантии с глубиной.

Произведём нормировку граничного условия этого уравнения с учётом того, что величина ускорения силы тяжести на поверхности шара не зависит от его внутренней структуры и для Земли составляет $g = 9.8283$ м/с²; для этого найдём разность между текущим ускорением (10) и ускорением на внешней поверхности шара $a(R)$:

$$a(u)_{об.} - a(R) = \frac{4}{3} \gamma \pi R \rho \left[Mn^3 \frac{1}{u^2} + d \frac{1}{u^2} (u^3 - n^3) \right] - \frac{4}{3} \gamma \pi R \rho = 0. \quad (11)$$

После сокращения на $4/3 \gamma \pi R \rho$ получим:

$$d \frac{1}{u^3} (u^3 - n^3) + Mn^3 \frac{1}{u^2} - 1 = 0. \quad (12)$$

Заменяя d его выражением (3) и решая уравнение (12) относительно M , получим:

$$M(u) = \frac{u + 1 + \frac{u^2}{n^3}}{u^2 + u + 1}. \quad (13)$$

На поверхности шара $u = 1$ и:

$$M(1) = \frac{1}{3} \left(2 + \frac{1}{n^3} \right) = \frac{1}{3n^3} (2n^3 + 1) = \frac{2}{3} + \frac{1}{3n^3}. \quad (14)$$

Слагающее ядро вещество плотностью $M\rho$, можно представить как суперпозицию плотностей собственно вещества ядра плотностью $m\rho$ и вещества оболочки плотностью $d\rho$; при этом величина $m = 1/3n^3$ зависит от положения границы раздела ядра и мантии, а величина $d = 2/3$ – постоянна на всём интервале от центра до поверхности.

$d = 2/3$ – независимость средней плотности вещества мантии от положения границы раздела – достаточно неожиданный результат!

III. УРАВНЕНИЕ БАЛАНСА РАЗНОСТЕЙ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Для составления этого уравнения используем соображения о балансе разностей гравитационных потенциалов сплошного шара и эквивалентного ему по разности гравитационных потенциалов слоистого шара с центральной симметрией, его ядра и оболочки (мантии).

На внешних поверхностях тяготеющих шаров обоих типов, таких, как сплошного и слоистого шара с центральной симметрией, значение гравитационного потенциала и ускорения свободного падения для каждого из них должно совпадать по величине независимо от внутренней структуры шаров, так как массы у них одинаковы.

В центре для каждого из них также должно выполняться условие равенства нулю ускорения силы тяжести в силу симметричности системы по всем трём осям.

В силу этих предположений для них должно выполняться и равенство разности гравитационных потенциалов:

$$U_{\text{спл.}} = U_{\text{слоист.}}, \quad (15)$$

так как:

$$g = -\text{grad } \varphi. \quad (16)$$

Гравитационный потенциал на внешней поверхности любого, как сплошного, так и слоистого шара с центральной симметрией равен:

$$\varphi_{\text{пов.}} = \frac{4}{3} \pi \gamma \rho R^2. \quad (17)$$

Гравитационный потенциал в центре каждого из шаров равен:

$$\varphi_{\text{центр.}} = 2\pi\gamma\rho R^2. \quad (18)$$

Разность гравитационных потенциалов между поверхностью и центром:

$$U = \varphi_{\text{центр.}} - \varphi_{\text{пов.}} = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho R^2. \quad (19)$$

Это равенство справедливо как для сплошного, так и слоистого шара с центральной симметрией, следовательно, для слоистого шара с центральной симметрией сумма разностей гравитационных потенциалов, существующих в оболочке (мантии) и ядре также должна быть равной U .

Запишем выражения для разности гравитационных потенциалов отдельно для оболочки (мантии) и ядра.

Оболочка:

$$\Delta\varphi_{\text{об.}} = \frac{4}{3}\pi\gamma\rho dR^2 \frac{1}{n}(1-n)^3. \quad (20)$$

Ядро:

$$\Delta\varphi_{\text{ядр.}} = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho M (Rn)^2. \quad (21)$$

Баланс разностей гравитационных потенциалов для слоистого шара с центральной симметрией:

$$\Delta\varphi_{\text{ядр.}} + \Delta\varphi_{\text{об.}} = U, \quad (22)$$

или:

$$\frac{2}{3}\pi\gamma\rho R^2 = \frac{2}{3}\pi\gamma\rho M (Rn)^2 + \frac{4}{3}\pi\gamma\rho dR^2 \frac{1}{n}(1-n)^3. \quad (23)$$

Это уравнение будет эквивалентно следующему – должно выполняться равенство площадей следующих фигур на рис.1(площади этих фигур равны разностям гравитационных потенциалов):

- прямоугольного треугольника со сторонами – ось абсцисс от 0 до 1, ордината от 0 до $G_g(1)$ и прямая $G_g(x)$;
- суммы площадей двух фигур:
 - ◆ прямоугольного треугольника, образованного прямой $G_n(t)$, прямой n и осью абсцисс от 0 до n ;
 - ◆ второй – отрезком ординаты от $FN(n)$ до $G_g(1)$, отрезком оси абсцисс от n до 1 и ограниченной сверху кривой $G_{en}(u)$.

Соответствующий график будет выглядеть следующим образом:

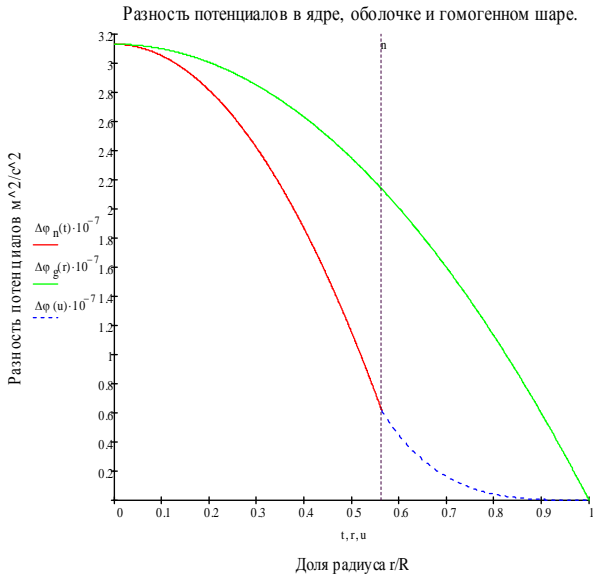


Рис. 3. Разность гравитационных потенциалов

Сокращая на $2/3\pi\rho rR^2$, получим:

$$1 = Mn^2 + 2d \frac{1}{n} (1-n)^3. \quad (24)$$

Заменяя M и d их выражениями (14) и (3), полученными ранее, имеем:

$$(1-n)(2n^2 - 10n + 5) = 1. \quad (25)$$

Решение этого уравнения относительно n даёт три корня:

$$n_1 = 1, \quad n_2 = \frac{1}{2}(5 + \sqrt{15}), \quad n_3 = \frac{1}{2}(5 - \sqrt{15}).$$

Так как по смыслу $n < 1$, искомым корнем будет $n_3 = 0.56351$.

На рис.4 линии, отмеченные значками, взяты из литературы: +, × – (Федынский, 1964); Δ – (Жарков, 1978); ◊ – (Аллен, 1977).

Полученная из вычислений величина $\mathbf{n} = 0.56351$ очень близка к величине $\mathbf{n} = 0.545$ для Земли, приводимой в литературе (Аллен, 1977); (Жарков, 1978); (Федынский, 1964); (Пушаровский Ю.М., Пушаровский Д.Ю., 2011). Исходя из полученной величины $\mathbf{n} = 0.56351$ и, подставляя её значение в выражения для d и M , получим для Земли величины $d = 2/3$, $M = 2.5295$, а также соответствующие плотности $\rho_{об.} = 3.68 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$, $\rho_{ядр.} = 13.96 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$.

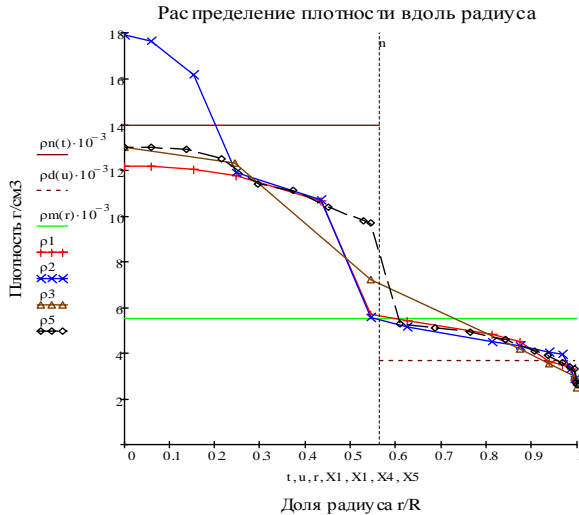


Рис. 4. Плотности. Сравнение расчётов различных моделей

Скорости в слоистом шаре

Отдельный интерес представляют собой величины скоростей, достигаемых при движении в гипотетической полой трубе, проходящей навывлет через геометрический центр обоих шаров.

$$V_{[a,b]} = \sqrt{2 \int_a^b a(x) dx} \quad \text{— обобщённая формула для нахождения скорости свободного падения тела в поле тяготения произвольного вида } \mathbf{a}(\mathbf{x}) \text{ на интервале } [a,b].$$

Например, для поля, линейно изменяющегося с расстоянием, вида $a(r) = a(R)R_{\text{тек}}/R$:

$$V_{\text{спл.}} = \sqrt{2R \frac{4}{3} \gamma \pi \rho R \int_1^0 x dx} = \sqrt{\frac{4}{3} \gamma \pi \rho R^2} \quad \text{— скорость, набираемая при движении в сплошном шаре.} \quad (26)$$

Подставляя реальные данные для Земли, получим $V = 7.913 \cdot 10^3$ м/с, что численно совпадает с величиной первой космической скорости.

$$V_{\text{ядр.}} = \sqrt{2R \frac{4}{3} \gamma \pi \rho R \int_0^n x dx} \quad \text{— скорость, набираемая при}$$

движении в ядре;

(27)

$$V_{об.} = \sqrt{2R \frac{4}{3} \gamma \pi \rho R \int_1^n \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3x^3} - 1 \right) dx}$$

– скорость, набираемая при

движении в оболочке.

(28)

График скоростей выглядит следующим образом:

$$V_{спл.} = \sqrt{2R \frac{4}{3} \gamma \pi \rho R \int_r^1 x dx} = 2R \sqrt{\frac{1}{3} \gamma \pi \rho (1 - r^2)}$$

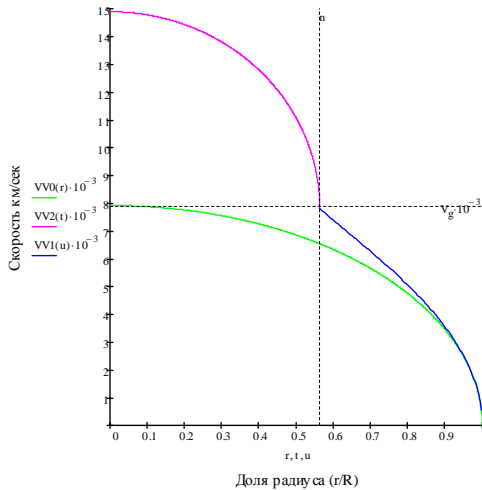
– на графике $VV0(r)$, здесь r – безразмерный радиус $R_{тек}/R$;

$$V_{об.} = \sqrt{2R \frac{4}{3} \gamma \pi \rho R \int_1^u \left(\frac{2}{3} + \frac{1}{3x^3} - 1 \right) dx} = \frac{2}{3} R \sqrt{\frac{1}{u} 2 \gamma \pi \rho (1 - u^2)}$$

– на графике $VV1(u)$;

$$V_{ядр.} = \sqrt{2R \frac{4}{3} \gamma \pi \rho R \int_0^t x dx} = 2R \sqrt{\frac{1}{3} \gamma \pi M \rho (n^2 - t^2)} + V_{об.}(n)$$

– на графике $VV2(t)$.



Скорости в ядре, оболочке и гомогенном шаре.

Рис. 5. Скорости в слоистом и сплошном шаре

Следует отметить любопытный факт: скорость тела, после прохождения оболочки (мантии) слоистого шара с центральной симметрией – $7.7989 \cdot 10^3$ м/с весьма близка по величине к скорости в центре сплошного шара – $7.9130 \cdot 10^3$ м/с (!).

Время туннелирования в слоистом шаре

Для сплошного шара однородной структуры подобная задача давно решена, при этом движение является гармоническим, с полупериодом равным $\pi(R/g)^{1/2} = 2529.4 \text{ с} = 42.15 \text{ мин}$.

Для систем, содержащих в своей структуре неоднородные гравитационные поля, задача осложняется, но, тем не менее, её можно решить.

Так как ядро слоистого шара с центральной симметрией имеет однородную структуру радиуса Rn , то движение в ядре так же является гармоническим, полупериод которого равен $\pi(Rn/g_n)^{1/2} = 1590.4 \text{ с} = 26.51 \text{ мин}$ и тело, пущенное с его границы с мантией, достигает центра ядра через $795.2 \text{ с} = 13.25 \text{ мин}$.

Время прохождения пробным телом интервала расстояния в поле тяготения произвольной конфигурации можно рассчитать по формуле:

$$t_{[a,b]} = \int_a^b \frac{1}{V(s)} ds, \quad (29)$$

где:

$t_{[a,b]}$ – время прохождения интервала $[a,b]$;

$V(s)$ – функция скорости на этом интервале, которая в свою очередь является функцией ускорения $a(s)$ на этом же интервале, т. е.:

$$t_{[a,b]} = \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2 \int_a^b a(s) ds}} ds. \quad (30)$$

Подставляя в (30) выражение для $a(s)$ из (10), находим подынтегральное выражение:

$$\frac{1}{\sqrt{\frac{8\pi\gamma\rho}{9} \int_n^1 \sqrt{\frac{1-s^3}{s}} ds}}. \quad (31)$$

Интеграл $\int \sqrt{(1-s^3)/s} ds$ аналитически взять не удалось, хотя определённый интеграл был посчитан. Таким образом, выражение для вычисления времени пролёта мантии приобретает вид:

$$t_m = \frac{3(1-n)}{\sqrt{8\pi\gamma\rho}} \frac{1}{\int_n^1 \sqrt{\frac{1-s^3}{s}} ds}. \quad (32)$$

После подстановки цифровых величин получим $t = 1266.6 \text{ с} = 21.1 \text{ мин}$.

Вследствие того, что тело, пущенное с наружной поверхности шара, подходит к границе мантии и ядра со скоростью, вычисляемой по формуле (28) и равной $7.7989 \cdot 10^3$ м/с, время пролёта ядра сокращается и может быть вычислено следующим образом: к средней скорости движения в ядре $V_{\text{ср.ядр.}} = Rn/t_{\text{ядр.}} = 4.5148 \cdot 10^3$ м/с прибавляется скорость, набранная телом после прохождении мантии – $7.7989 \cdot 10^3$ м/с, что в итоге даст среднюю скорость движения тела в ядре $1.2314 \cdot 10^4$ м/с и время пролёта ядра будет составлять $t = Rn/1.2314 \cdot 10^4$ м/с = 291.56 с = 4.86 мин. Время достижения центра шара свободно падающим телом, пущенным с поверхности слоистого шара с центральной симметрией будет равняться сумме времён прохождения мантии и ядра и составит 15582 с или 25 мин 58 с и оно достигнет антиподной точки спустя 51 мин 56 с после начала движения.

РАЗДЕЛ II

В этом разделе, опираясь на реальные измеренные данные, получим уточнённые параметры внутренней структуры идеального слоистого шара с центральной симметрией, такие, как слоистость мантии, уточнённое давление в её объёме, плотности её слоёв и поверхностную плотность.

МОМЕНТ ИНЕРЦИИ СЛОИСТОГО ШАРА С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Момент инерции сплошного шара равен:

$$J_{\text{спл.}} = 0.40 M_{\text{ш}} R^2, \quad (33)$$

где $M_{\text{ш}}$ – масса шара; R – его радиус.

Измеренный момент инерции Земного шара (Буллен, 1978) равен $0.3308 M_{\text{ш}} R^2$, что меньше аналогичной величины для сплошного шара ($0.40 M_{\text{ш}} R^2$), и указывает на стратификацию слагающего его вещества по радиусу. Вычисленный момент по предложенным параметрам ($M = 2.5295$ и $d = 2/3$) также не совпадает по величине с измеренным. Так как наблюдается очень сильная зависимость величины момента инерции шара от структуры его внешних слоёв ($J \sim r^5$), то, варьируя распределение величины плотности вещества мантии по радиусу, можно подобрать такое его значение, при котором, сохранив его среднюю величину (определённую для вещества мантии по балансам масс, ускорений и разностей гравитационных потенциалов), можно будет получить величину измеренного момента инерции с любой, наперёд заданной точностью.

Момент инерции слоистого шара с центральной симметрией равен сумме моментов ядра и окружающей его оболочки:

$$J_{\text{сл.}} = J_{\text{ядр.}} + J_{\text{об.}} = 0.4 \left[M_{\text{ядр.}} R_{\text{ядр.}}^2 + M_{\text{об.}} \left(R_{\text{шар.}}^2 - R_{\text{ядр.}}^2 \right) \right], \quad (34)$$

или, переходя к величинам плотностей:

$$J_{\text{сл.}} = \frac{8}{15} \pi \rho_{\text{ср.}} R^5 \left[Mn^5 + d(1 - n^5) \right]. \quad (35)$$

Величина момента инерции, рассчитанная по вышеприведённой формуле, не совпадает с измеренной величиной момента инерции Земли.

Для получения величины момента инерции максимально приближенного к измеренному, воспользуемся следующим приёмом: примем величину плотности вещества мантии не постоянной, а уменьшающейся по линейному закону по направлению от границы с ядром до поверхности и в среднем своём значении равной средней плотности, определённой для вещества мантии по балансам масс, ускорений и разностей гравитационных потенциалов.

В рамках этого предположения площадь треугольника образованного линией равной плотности, границей ядра, линией текущей плотности и находящегося слева и сверху от точки пересечения с линией средней плотности (обозначим её q), должна быть равна площади треугольника образованного линией равной плотности, поверхностью шара, линией текущей плотности и находящегося справа и снизу от точки пересечения q с линией средней плотности. В случае равенства площадей этих треугольников, величина среднего значения плотности вещества мантии остаётся постоянной при изменении момента инерции шара.

В рамках этой модели можно также предположить, что точек q может быть более одной, а, например, две – (q_{in} и q_{out}) в промежутке между которыми ход линии плотности совпадает с ходом её среднего значения. Также далее можно предположить произвольный вид хода кривой плотности с единственным условием, что площадь выпуклого многоугольника, находящегося выше прямой средней плотности, будет равна площади фигуры, находящегося ниже прямой средней плотности. Подобные рассуждения можно применить и к внутренней структуре ядра.

Рассмотрим одну из простых зависимостей (простейшая представляет собой набор прямоугольников, т. е. микроскачков плотности) – линейную. Подобное предположение имеет право быть, т. к. сейсмическими методами скачки плотности в веществе мантии не наблюдаются, а бесступенчатое изменение плотности – ненаблюдаемо в принципе (на нём основана акустическая “невидимость” подводных лодок).

Предположим, что вблизи от границы с ядром плотность вещества мантии превышает её среднюю плотность $\bar{\rho}$ на величину $+\Delta\bar{\rho}_{\text{in}}$ и линейно падает с увеличением расстояния от центра, достигая её среднего значения в некоторой точке q , продолжая падать и в дальнейшем, по направлению к поверхности, достигая на её границе величины $\bar{\rho} - \Delta\bar{\rho}_{\text{out}}$. Единственным строгим условием подобного преобразования должна служить неизменность величины средней плотности вещества мантии на всём её протяжении, что в рассматриваемом случае выливается в требование равенства площадей треугольников, находящихся сверху и снизу от прямой, представляющей среднюю плотность веще-

ства мантии. Задача имеет множественные решения по причине увеличения числа независимо определяемых переменных относительно количества уравнений. Найденная кривая момента инерции вблизи поверхности должна идти ниже аналогичной кривой, построенной для средней плотности вещества мантии.

Положение точки q на прямой средней плотности определится следующим выражением:

$$q = \frac{\Delta\bar{\rho}_{out} + n\Delta\bar{\rho}_{in}}{\Delta\bar{\rho}_{out} + \Delta\bar{\rho}_{in}}. \tag{36}$$

Задавшись величинами плотностей вещества мантии вблизи её границы с ядром и вблизи её границы с поверхностью, можно точно вычислить величину q , определяющую границу внутренней(in) и внешней(out) частей мантии.

Уравнения линий, описывающих соотношение плотностей в веществе мантии, имеют вид:

$$\rho d2(u_{in}) = \frac{\bar{\rho} d}{n - q} \left[n - u_i - \frac{\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho}_{in}}{\bar{\rho}} (q - u_{in}) \right] \quad \text{— для внутренней части мантии} \tag{37}$$

$$\rho d3(u_{out}) = \frac{\bar{\rho} d}{1 - q} \left[1 - u_{out} - \frac{\bar{\rho} - \Delta\bar{\rho}_{out}}{\bar{\rho}} (q - u_{out}) \right] \quad \text{— для внешней части мантии} \tag{38}$$

Вид кривой изменения плотности в этом случае следующий:

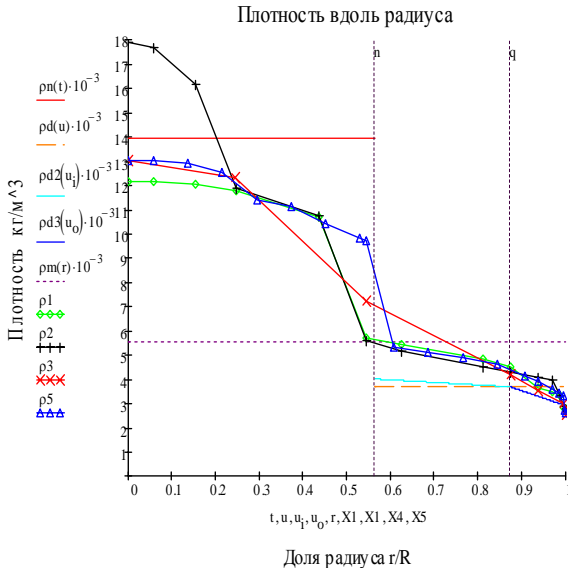


Рис. 6. Плотность в модифицированной мантии

Значки на графике те же, что и на Рис. 4.

Момент инерции внешней части мантии:

$$J_2(u_{\text{out}}) = \frac{2}{5} \frac{d}{1-q} \left[1 - u_{\text{out}} - \frac{\bar{\rho} - \Delta\bar{\rho}_{\text{out}}}{\bar{\rho}} (q - u_{\text{out}}) \right] (1 - u_{\text{out}}^5). \quad (39)$$

Момент инерции внутренней части мантии:

$$J_1(u_{\text{in}}) = \frac{2}{5} \frac{d}{n-q} \left[n - u_{\text{in}} - \frac{\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho}_{\text{in}}}{\bar{\rho}} (q - u_{\text{in}}) \right] (1 - u_{\text{in}}^5). \quad (40)$$

Момент инерции всей мантии:

$$J = J_2(q) + J_1(n). \quad (41)$$

Момент инерции ядра:

$$J_M(t) = 0.3308 - \frac{2}{5} M t^5. \quad (42)$$

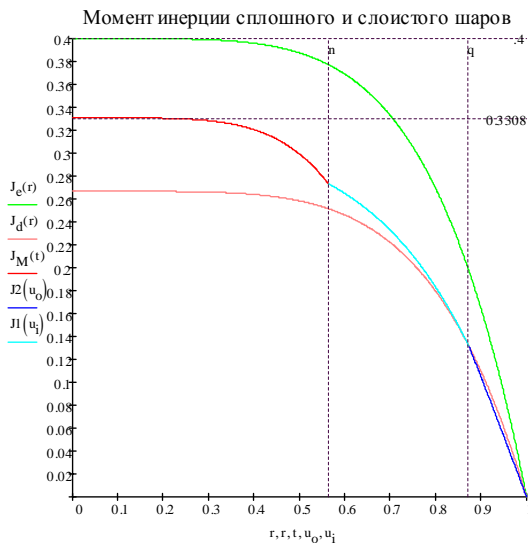


Рис. 7. Момент инерции

Графики построены без учёта постоянного для всех линий коэффициента $4/3\pi\rho_{\text{cp}}R^5$.

Чтобы обеспечить “стыковку” кривых, представляющих моменты инерции ядра и внутренней части мантии на их границе n , приравняем их:

$$J_M(n) = J_1(n) \quad (43)$$

Подставим в это равенство реальный измеренный коэффициент величины момента инерции Земли равный 0.3308 и, после несложных преобразований, получим:

$$\bar{\rho} + \Delta\rho_{\text{in}} = \frac{\bar{\rho}}{d} \left(\frac{0.8270 - Mn^5}{1 - n^5} \right). \quad (44)$$

После подстановки полученных ранее величин $M = 2.5295$, $d = 2/3$, $n = 0.5635$ получим:

$$\bar{\rho} + \Delta\rho_{\text{in}} = 1.0867\bar{\rho} = 4.00 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3 (\Delta\rho_{\text{in}} = +0.32 \cdot 10^3 \text{ кг / м}^3). \quad (45)$$

В результате этих действий получим только один независимый параметр – $\bar{\rho} - \Delta\rho_{\text{out}}$ – плотность на внешней границе внешней части мантии, другими словами – плотность вблизи поверхности шара, которая более-менее поддаётся измерениям.

Для получения его точного значения воспользуемся тем обстоятельством, что величина давления внутренней части модифицированной мантии на её границе с ядром должна быть равной величине давления на той же границе мантии с веществом постоянной плотности.

ДАВЛЕНИЕ В СЛОИСТОМ ШАРЕ С ЦЕНТРАЛЬНОЙ СИММЕТРИЕЙ

Давление в произвольной текучей среде: $p = \rho(h)a(h)h$, где $\rho(h)$ – плотность вещества, $a(h)$ – ускорение силы тяжести, h – глубина. В дифференциальном виде: $dp = \rho(h)a(h)dh$. В центре слоистого шара с центральной симметрией оно будет складываться из двух компонентов: давления, создаваемого оболочкой $p_{\text{об}}$. (или её слоями) и давления, создаваемого ядром $p_{\text{ядр}}$.

Для шара сплошной структуры:

$$P_{\text{спл.}} = \frac{2}{3} \pi \gamma \rho^2 R^2 (1 - r^2) \text{ – на графике } PG(r). \quad (46)$$

Для структуры слоистого шара с центральной симметрией:

в однородной оболочке с неизменной плотностью:

$$p_{\text{об.}}(u) = \rho d \int_u^1 \frac{4}{3} \pi \gamma R \rho \frac{1}{3} \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) R x dx = \frac{4}{9} \pi \gamma d \rho^2 R^2 \left[\frac{2}{3} (1 - u^3) - \ln u \right] \text{ – на графике } P_{\text{en}}(u), \quad (47)$$

в ядре:

$$p_{\text{ядр.}}(t) = \rho M \int_t^n \frac{4}{3} \pi \gamma R \rho M x R dx = \frac{2}{27} \pi \gamma \rho^2 R^2 \frac{1}{n^6} (2n^3 + 1)^2 (n^2 - t^2). \quad (48)$$

Для шара в целом:

$$p_{\text{сл.}} = \frac{2}{27} \pi \gamma \rho^2 R^2 \frac{1}{n^6} (2n^3 + 1)^2 (n^2 - t^2) + p_{\text{об.}}(n) \quad \text{– на графике } PN(t). \quad (49)$$

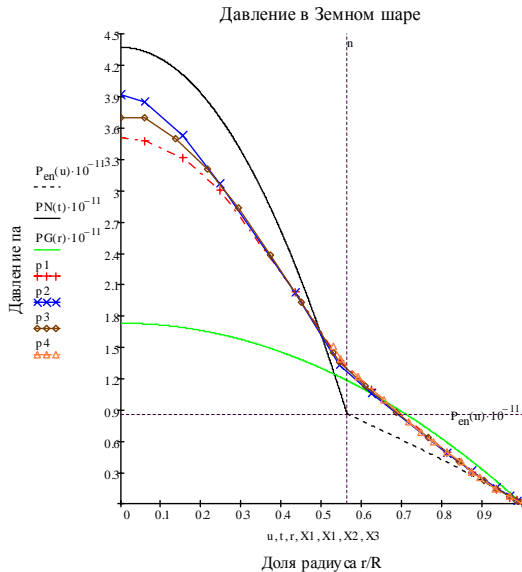


Рис. 8. Давление. Расчёт разных моделей

Линии, отмеченные значками, взяты из литературы +, × – (Федынский, 1964, стр. 49–50); \diamond – (Аллен, 1977, стр. 173); Δ – (Пушаровский Ю.М., Пушаровский Д.Ю., 2011, стр. 26), $P_{\text{en}}(u)$, $PN(t)$, $PG(r)$ – расчётные.

На графике заметно, что ход кривых давления в мантии, рассчитанных в разных моделях, весьма близок к ходу кривой давления для однородного шара со средней плотностью, а ведь плотность вещества мантии гораздо меньше средней и линия должна идти ниже, что укладывается в рамки представленной модели.

Теперь рассмотрим случай со слоистой мантией, предварительные параметры которой получены при рассмотрении момента инерции. При этом сделаем некоторые замечания относительно величины и хода кривой графика давления в модифицированной мантии.

Величина давления в мантии на границе с ядром одинаковы в обоих случаях, кривая графика давления в модифицированной мантии на начальном участке (вблизи поверхности шара) должна проходить ниже кривой давления в шаре с немодифицированной мантией, вследствие уменьшения плотности вещества наружной части мантии.

Давление во внешней части мантии находится по формуле:

$$\begin{aligned}
 p_{\text{out}}(h) &= \int_{u_{\text{out}}}^1 \rho_{\text{out}}(h) g_{\text{out}}(h) dh = \\
 &= \frac{4}{9} \gamma \pi \rho R^2 \int_{u_{\text{out}}}^1 \frac{d\rho}{1-q} \left[1-x - \frac{\bar{\rho} - \Delta\bar{\rho}_{\text{out}}}{\bar{\rho}} (q-x) \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) \right] x dx
 \end{aligned} \tag{50}$$

Давление во внутренней части мантии находится по аналогичной формуле:

$$\begin{aligned}
 p_{\text{in}}(h) &= \int_{u_{\text{in}}}^q \rho_{\text{in}}(h) g_{\text{in}}(h) dh = \\
 &= \frac{4}{9} \gamma \pi \rho R^2 \int_{u_{\text{in}}}^q \frac{d\rho}{n-q} \left[n-x - \frac{\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho}_{\text{in}}}{\bar{\rho}} (q-x) \right] \left(2x + \frac{1}{x^2} \right) x dx + p_{\text{out}}(q)
 \end{aligned} \tag{51}$$

Итоговые выражения после операции взятия интегралов не приводятся из-за их громоздкости.

Вследствие того, что величина давления в мантии (47) и (51) на её границе с ядром одинаковы, т. е.:

$$p_{\text{об.}}(n) = p_{\text{in}}(n), \tag{52}$$

приравняем их; разрешая относительно $\bar{\rho} + \Delta\bar{\rho}_{\text{in}}$, получим величину плотности на поверхности шара $\rho_{\text{out}} = 2.90 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$ ($\Delta\bar{\rho}_{\text{out}} = -0.78 \cdot 10^3 \text{ кг/м}^3$) и положение границы между частями мантии $q = 0.8731R = 5562 \text{ км}$.

График изменения давления внутри Земли с учётом слоистости мантии:

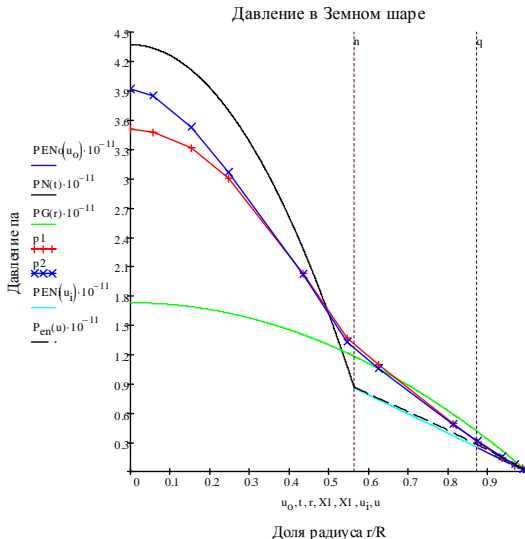


Рис. 9. Давление в шаре с модифицированной мантией

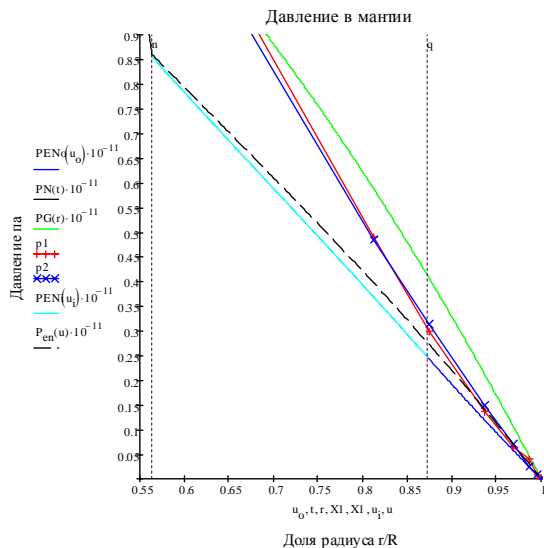


Рис. 10. То же с увеличением

Как видно из графиков, учёт слоистости не оказывает значительного влияния на ход кривой давления в мантии.

Исходя из предположения что ядро – жидкое, видимо стоит учесть влияние коэффициента поверхностного натяжения на величину давления в ядре. Также можно предположить, что вещество ядра может быть композицией двух несмешивающихся жидкостей типа вода – масло, вода – бензин. В таком случае наличие каждой границы внесёт свой вклад в величину поверхностного натяжения. Т. к. физические свойства веществ и их химический состав при таких условиях крайне неопределённые, о величинах этих коэффициентов остаётся только строить различного рода предположения, принимая за отправную точку их известные значения.

Можно поставить модельный эксперимент в условиях невесомости, взяв несмешивающиеся между собой жидкости (ртуть, бром, вода, керосин) и последовательно выдуть шары один внутри другого.

Все расчёты не учитывают химический состав и структуру веществ, составляющих ядро и оболочку шара и возможна их применимость, в частности, к планетам земной группы, что находит своё подтверждение в соответствующей литературе (Жарков, 1978).

Трудно сказать, по какой причине плотности веществ мантии и ядра будут соответствовать вышепринятым, ведь в предположении о первичном составе протопланетного вещества они могут быть произвольными в процентном отношении. Возможно, нижние слои мантии, и верхние слои ядра состоят из веществ одинакового химического состава и разнятся между собой структурой.

Сильно расходится с расчётными данными других моделей величина ускорения силы тяжести на границе ядра и мантии – $14.01 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2$ против литературных – $10.68 \cdot 10^3 \text{ м/с}^2$.

Л И Т Е Р А Т У Р А

1. Аллен К.У. **Астрофизические величины**. Москва: Мир, 1977.
2. Буллен К. **Плотность Земли**. М.: Мир, 1978.
3. Жарков В.Н. **Внутреннее строение Земли и планет**. Москва: Наука, 1978.
4. Пушаровский Ю.М., Пушаровский Д.Ю. “Когда, как и почему образовались геосферы Земли”, *Природа* **5**. С. 25–38 (2011).
5. Снайдер Р. **Двухкомпонентная модель Земного шара. Физика за рубежом Сер. Б.** М.: Мир, 1988. С. 19–23.
6. Федынский В.В. **Разведочная геофизика**. М.: Недра, 1964.